

Rekenen – Werken met strategieën

Rekenen in de kerndoelen

Onderwijs dient vorm te worden gegeven op basis van de wettelijk bepaalde kerndoelen. Kerndoelen zijn wettelijke en richtinggevende doelen voor het primair onderwijs op verschillende vakgebieden.

Voor rekenen gelden de kerndoelen 23 tot en met 33:

In de loop van het primair onderwijs verwerven kinderen zich - in de context van voor hen betekenisvolle situaties - geleidelijk vertrouwdheid met getallen, maten, vormen, structuren en de daarbij passende relaties en bewerkingen. Ze leren 'wiskundetaal' gebruiken en worden 'wiskundig geletterd' en gecijferd. De wiskundetaal betreft onder andere rekenwiskundige en meetkundige zegswijzen, formele en informele notaties, schematische voorstellingen, tabellen en grafieken en opdrachten voor de rekenmachine. 'Wiskundig geletterd' en gecijferd betreft onder andere samenhangend inzicht in getallen, maatzicht en ruimtelijk inzicht, een repertoire van parate kennis, belangrijke referentiegetallen en -maten, karakteristieke voorbeelden en toepassingen en routine in rekenen, meten en meetkunde. Meetkunde betreft ruimtelijke oriëntatie, het beschrijven van verschijnselen in de werkelijkheid en het redeneren op basis van ruimtelijk voorstellingsvermogen in twee en drie dimensies.

De onderwerpen waaraan kinderen hun 'wiskundige geletterdheid' ontwikkelen, zijn van verschillende herkomst: het leven van alledag, andere vormingsgebieden en de wiskunde zelf. Bij de selectie en aanbidding van de onderwerpen wordt rekening gehouden met wat kinderen al weten en kunnen, met hun verdere vorming, hun belangstelling en de actualiteit, zodat kinderen zich uitgedaagd voelen tot wiskundige activiteit en zodat ze op eigen niveau, met plezier en voldoening, zelfstandig en in de groep uit eigen vermogen wiskunde doen: wiskundige vragen stellen en problemen formuleren en oplossen.

In de rekenwiskundeles leren kinderen een probleem wiskundig op te lossen en een oplossing in wiskundetaal aan anderen uit te leggen. Ze leren met respect voor ieders denkwijze wiskundige kritiek te geven en te krijgen. Het uitleggen, formuleren en noteren en het elkaar kritiseren leren kinderen als specifiek wiskundige werkwijze te gebruiken om alleen en samen met anderen het denken te ordenen, te onderbouwen en fouten te voorkomen.

Wiskundig inzicht en handelen

23. De leerlingen leren wiskundetaal gebruiken.
24. De leerlingen leren praktische en formele rekenwiskundige problemen op te lossen en redeneringen helder weer te geven.
25. De leerlingen leren aanpakken bij het oplossen van rekenwiskundeproblemen te onderbouwen en leren oplossingen te beoordelen.

Getallen en bewerkingen

26. De leerlingen leren structuur en samenhang van aantallen, gehele getallen, kommagetallen, breuken, procenten en verhoudingen op hoofdlijnen te doorzien en er in praktische situaties mee te rekenen.
27. De leerlingen leren de basisbewerkingen met gehele getallen in elk geval tot 100 snel uit het hoofd uitvoeren, waarbij optellen en aftrekken tot 20 en de tafels van buiten gekend zijn.
28. De leerlingen leren schattend tellen en rekenen.
29. De leerlingen leren handig optellen, aftrekken, vermenigvuldigen en delen.

30. De leerlingen leren schriftelijk optellen, aftrekken, vermenigvuldigen en delen volgens meer of minder verkorte standaardprocedures.
31. De leerlingen leren de rekenmachine met inzicht te gebruiken.

Meten en meetkunde

32. De leerlingen leren eenvoudige meetkundige problemen op te lossen.
33. De leerlingen leren meten en leren te rekenen met eenheden en maten, zoals bij tijd, geld, lengte, omtrek, oppervlakte, inhoud, gewicht, snelheid en temperatuur.

Rekendomeinen

De meeste gebruikte methodieken voor rekenonderwijs hanteren de volgende indeling qua rekendomeinen:

1. Getallen
 - a. Getalbegrip (spontane wis-/rekenkundige begrippen, telnamen, tellen van aantallen, verkort oftewel gestructureerd tellen, ordenen, semi-formele sommen, rekentekens, formeel rekenen)
 - b. Getallen en getalrelaties (vooral van groep 3) (begrippen, rekentekens, getalbegrip, tellen, ordenen, reeksen)
 - c. Basisbewerkingen (splitsen, bussommen, +, -, x, :, hoofdrekenen)
2. Meten en meetkunde
 - a. Meten (meten, wegen, inhoud, temperatuur, begrippenlijst)
 - b. Tijd (klokijken analoog en digitaal, jaartallen notatie en diverse jaartellingen, kalender verkennen, kalender hanteren, eenheden van tijd)
 - c. Geld (kennis van, rekenen met geld)
 - d. Vormen en ruimtelijke oriëntatie (vormen van ruimtelijke figuren, blokkenbouwsels 3D figuren, plaats- en ruimte bepaling)
3. Verhoudingen
 - a. Breuken:
wat is een breuk, wat is teller/noemer, notatie, vereenvoudigen, gelijknamig maken, bewerkingen met breuken
 - b. Kommagetallen:
kennis over en notatie, splitsen, afronden, delen, vermenigvuldigen
 - c. Procenten:
kennis van procenten, deel van geheel, groei/afname (toepassing procenten), relatie tussen breuken, procenten en kommagetallen
4. Verbanden
 - a. Tabellen lezen en tekenen (verhoudingstabel, turftabel, afstandstabel, rijen, kolommen, legenda)
 - b. Grafieken (beeldgrafiek, staafgrafiek, lijngrafiek)
 - c. Diagrammen (cirkeldiagram, staafdiagram, puntdiagram)
 - d. Assenstelsel (coördinaten lezen)

Rekenstrategieën

Een strategie is een manier om iets te bereiken. Een rekenstrategie is een manier om tot de oplossing van een rekenkundig vraagstuk of som te komen. Er zijn verschillende manieren om dat te doen. Strategieën worden gehanteerd bij de basisbewerkingen optellen, aftrekken, vermenigvuldigen en delen, al dan niet ondersteund door materiaal (rekenrek, kralenketting, stroken, tekeningen maken).

Over het algemeen wordt vanaf groep 3 in eerste instantie gewerkt met materiaal om rekensommen of rekenvraagstukken concreet te maken. Na de fase van concreet komt de fase van abstract waarbij ervan uit wordt gegaan dat kinderen getalbeelden en sommen in het hoofd kunnen visualiseren of uiteindelijk zelfs helemaal abstraheren. We spreken dan van formeel rekenen. Dat gebeurt aan de hand van rekentekens. Om bij formeel rekenen tot een oplossing te komen is het zaak dat kinderen strategieën leren en leren toepassen. Er zijn strategieën voor formele rekenopgaven voor optellen, aftrekken, vermenigvuldigen en delen.

Bij automatiseren of memoriseren in de methodes wordt bedoeld dat kinderen sommen vlot kunnen uitrekenen met behulp van een strategie.

Toepassen van bewerkingen: Formeel rekenen met $+/-/ \times /:$

Strategieën bij optellen en aftrekken (met of zonder materiaal):

1. Handig rekenen
 - a. Bij optellen
 - rijgen
 - splitsen
 - Dubbelen/bijna dubbelen
 - rekenen via tiental
 - compenseren
 - analogie
 - verwisselen
 - omvormen
 - b. Bij aftrekken
 - rijgen
 - aanvullen
 - splitsen
 - rekenen via tiental
 - compenseren
 - terugtellen
 - analogie
 - omvormen
2. Kolomsgewijs optellen en aftrekken
3. Traditioneel cijferen
4. Hoofdrekenen
5. Werken met de rekenmachine

Strategieën bij vermenigvuldigen

1. Herhaald optellen (via modellen zoals groepjesmodel of verhoudingstabel)
2. Handig rekenen
 - a. Verdelen
 - b. Compenseren
 - c. Verwisselen

- d. Verdubbelen=halveren
- e. Analogie
- 3. Kolomsgewijs rekenen
- 4. Traditioneel cijferen
- 5. Hoofdrekenen
- 6. Werken met de rekenmachine

Strategieën bij delen

- 1. Herhaald aftrekken
- 2. Hapmethode/kolomsgewijs
- 3. Handig rekenen
 - a. Verdelen
 - b. Compenseren
 - c. Analogie
 - d. omvormen
- 4. Traditioneel cijferen: staartdeling
- 5. Hoofdrekenen
- 6. Werken met de rekenmachine

Handig rekenen

Bij handig rekenen wordt kennis van rekenfeiten en basisberekeningen (kerndoel 27), eigenschappen van getallen en bewerkingen (kerndoel 26) en rekenstrategieën gecombineerd. Kenmerkend voor handig rekenen is de flexibiliteit waarmee bewerkingen uitgevoerd worden. Er wordt al naar gelang de getallen en de bewerking(en) gekozen voor een passende strategie of combinatie van strategieën (SLO). Bij handig rekenen leren kinderen relaties, eigenschappen en regels van en tussen getallen kennen, ontdekken en toepassen (Alles telt).

Handig rekenen en rekenstrategieën zijn een belangrijke basis om toe te passen bij andere rekenbewerkingen bij rekendoelen zoals berekenen van oppervlakte, tijdsduur en zo nog veel meer. Getalkennis en rekenstrategieën vormen een essentiële basis voor het doen van rekenbewerkingen en het oplossen van rekenvraagstukken.

Eerder werden al genoemd manieren van handig rekenen. Manieren van handig rekenen vragen getalbegrip en getal-inzicht. Op basis van de bewerking en op basis van de getallen moeten keuzes gemaakt worden welke manier voor een iemand het best past om tot een oplossing te komen. Er zijn verschillende indelingen van strategieën mogelijk, er worden verschillende termen gebruikt. Bij complexe sommen zijn combinaties van strategieën nodig.

Toelichting bij de manier van handig rekenen:

Handig rekenen	Toelichting	Voorbeeld
Splitsen/verdelen*	Getallen worden opgesplitst of verdeeld om zo de rekenbewerking gemakkelijker te maken	$46 + 53 \rightarrow 90 + 9$ $12 \times 26 \rightarrow 10 \times 26 \text{ en } 2 \times 26$
Rijgen*	Gebaseerd op de getallenlijn, eerste getal blijft gelijk. Hiervoor is het nodig dat kinderen getallen kunnen splitsen. Er worden meerdere stappen aan elkaar geregen om tot een oplossing te komen.	$230 + 90: 230 \rightarrow 300 \rightarrow 320$
Terug tellen/doortellen	Een voor een door- of terug tellen om tot een antwoord te komen. Past alleen bij kleine getallen. Deze manier is basaal en heeft op de langere termijn niet de voorkeur	$8 - 3 \rightarrow 8, 7, 6, 5$ $9 + 4 \rightarrow 9, 10, 11, 12, 13$
Analogie/familiesommen*	Een moeilijke som uitrekenen door er een vergelijkbare gemakkelijkere som van te	$21000 - 7000$ denk aan $21 - 7$

	maken. Ook wel de nullen weghalen bij grote getallen	
Aanvullen	Bij aanvullen wordt een aftreksom omgevormd naar een optelsom	$306 - 298 \rightarrow 298 + ?$ is $306 -$ eerst $+2$, dan nog $+6$
(Ver)dubbelen/ bijna dubbelen /halveren	Inzicht in feit dat getallen zich op een bepaalde manier verhouden: dubbelen/bijna dubbelen en halveren. Dan weten we ook de bijna-dubbelsommen. Dubbelen bij vermenigvuldigen en delen wordt o.a. toegepast in verhoudingstabellen. Wordt in methodes bij x en : beperkt benoemd in handleidingen. Wordt veelal geoefend middels sommenrijen	$4 + 4$ is $16 \rightarrow 8 + 8$ is 32 $4 + 4$ is $8 \rightarrow 4 + 5$ is 9 3×4 is $12 \rightarrow 6 \times 4$ is 24 Maar ook
Verdubbelen = halveren	Bij vermenigvuldigsommen geldt dat sommen vereenvoudigd kunnen worden door een deel van de som te verdubbelen en de andere deel van de som te halveren.	50×28 is evenveel als 100×14
Compenseren (ook wel via Steunsommen/anker-sommen)	Handig rekenen door sommen te vereenvoudigen via rondere of gemakkelijkere getallen	$1185 - 999 \rightarrow 1185 - 1000 + 1$ $90 + 65 \rightarrow$ is $100 + 65$ minus 10 $6 \times 58 \rightarrow 6 \times 60$ minus 6×2 (12)
via het tiental/honderdtal	Doortellen of terugtellen naar een tiental of honderdtal	$90 + 65 \rightarrow 90 + 10 + 55$ $1035 - 48 \rightarrow 1000 - 13$
Verwisselen	Posities van getallen verwisselen om de som gemakkelijker uit te kunnen rekenen. Door verwisselen lijkt de som makkelijker	$7 + 342 \rightarrow 342 + 7$ $12 \times 4 \rightarrow 4 \times 12$
Omvormen	Een som zodanig omvormen/vereenvoudigen dat deze is uit te rekenen.	$604 - 254$ is evenveel als $600 - 250$ $87 + 68 \rightarrow$ drie van de 68 naar $87 \rightarrow 90 + 65$

*belangrijkste manieren van handig rekenen

Bron: Tule-SLO, www.rekenen-oefenen.nl

Aanvullende strategie: schatstrategie (voorspelrichting van een uitkomst, toe te passen op alle bewerkingen) – hiervoor is een basis van getalbegrip en hoeveelheid begrip nodig. Dit wordt in alle methodes wel gebruikt. Het is echter niet een echte strategie te noemen omdat het niet leidt tot het juiste eindresultaat, wel een benadering ervan. Het kan werken als een controlemechanisme. Is een uitkomst logisch of reëel?

Belangrijke voorwaarden voor rekenonderwijs

Inhoudelijke essentie voor kinderen als voorwaarde voor rekenonderwijs en het werken met strategieën:

- Begrippenkennis/woordenschat op gebied van rekenen en wiskunde (denk aan kennis van tijd, geld, getallen, bewerkingen, getalfuncties en rekenbegrippen, getallen kunnen plaatsen op lijn, sprongen maken op getallenlijn, wat is meer/minder, van groot naar klein, positie honderden, tien e.d.)
- Naast hoofdrekenen ook schriftelijk verwerken van rekenhandelingen (kladwerk)
- Aandacht voor oplossingsstrategieën van anderen
- Rol van de leerkracht (kennis van leerlijnen, kundig in geven van activerende instructie, organiseren van interactie, kennis van en gebruik van materialen, gebruik van schooltaal/rekentaal en ontwikkelen van woordenschat rekentaal)

Essentiële randvoorwaarden:

1. Leerkracht met kennis van rekendoelen en opbouw van rekenstof/curriculumbewustzijn
2. Leerkracht met kennis en kunde van de verschillende reken strategieën (vooral ook manieren van handig rekenen)
3. Leerkracht met kennis van rekenbegrippen en reken-woordenschat
4. Leerkracht die in staat is tot een goede didactische opbouw van een les
5. Mogelijkheid tot samenwerken tussen kinderen, leren van elkaars strategieën
6. Mogelijkheid voor kinderen om bewerkingen uit te werken op papier (kladwerk)

Achtergrondkennis en informatie voor de leerkracht

Te gebruiken bij de opbouw van rekenlessen:

- Referentieniveaus
- Kerndoelen uitgewerkte leerlijnen per jaargroepen
- Cruciale leermomenten rekenen
- Methoden

Onderzoek strategieën – werkwijze en materialen

Onderzochte methoden:

- Wereld in Getallen (rekenmethode)
- Alles telt (rekenmethode)
- Rekenrijk (rekenmethode)
- Rekentuin (online leeromgeving met rekenoefeningen)
- Muiswerk (online leeromgeving met rekenoefeningen)

Niet onderzocht:

- Met Sprongen Vooruit: oefeningen voor rekenbegrip, onderzocht door Thomas en Charles
- Snappet: geen methode, een systeem waarbinnen gewerkt wordt aan doelen vanuit bovengenoemde rekenmethodes of op basis van de SLO leerdoelen. Snappet voegt zich naar de gekozen methode en is inzetbaar voor groep 4 tot en met 8 leerstof. In groep 3 moet eerst de basale stof aangeboden worden en moet een bepaald aantal rekenvaardigheden worden eigen gemaakt.

De matrix is tot stand gekomen aan de hand van:

- Methode-handleidingen Wereld in Getallen van de groepen 3 tot en met 8.
Methode WIG kent handelingswijzers per groep en per soort opgave (een soort van uitlegkaarten). Methodehandleiding per blok geeft voorin 'leerlijnen overzicht'; daaruit zijn de strategieën te herleiden. Ook zijn ze beschreven in de inleiding van 'leerlijnen' (blz 4/5 van de handleiding bij een blok)
- Methode handleidingen Alles telt van de groepen 3 tot en met 8
Methode Alles telt: blok-handleiding geeft helder leerdoelen, thema's en deels strategieën weer.
- Overzicht Rekenrijk: leerstofoverzichten en strategiegebruik
(<https://view.publitas.com/noordhoff-basisonderwijs/rekenrijk-leerstofoverzicht/page/1>)
- Handleidingen en demo Muiswerk rekenen
(<http://www.muiswerk.nl/po/primair-onderwijs/handleidingen-bolesbestanden>)
Muiswerk geeft oefenstof voor groep 1 (rekenen op maat 1) tot en met groep 8 (rekenen op maat 8) op de gebieden:

- getallen en getalrelaties
- bewerkingen (hoofdrekenen: optellen, aftrekken, vermenigvuldigen, delen)
- Meten, tijd en geld
- Meetkunde

Muiswerk geeft antwoordmogelijkheden d.m.v. meerkeuzevragen of slepen naar de juiste plaats. Er wordt ingesproken uitleg aangeboden (verbaal) bij oefeningen.

- Beschrijving van de spellen rekentuin
(<https://www.rekentu.nl/wp-content/uploads/2015/04/Spellen-Rekentu-new-template.pdf>) en oefeningen rekentuin via leerling-login (www.rekentu.nl)
Rekentuin is vooral gericht op basale rekenbewerkingen, tempo en hoofdrekenen.

Zoals is terug te lezen in het overzicht van SLO doelen is het gebruikelijk om een aanvang te maken met rekenen aan de hand van materialen. Alle methoden starten met concreet materiaal waarna het steeds meer abstracte vaardigheden worden, waarbij uitgegaan wordt van oplossingen vanuit het hoofd (hoofdrekenen). Alle methodeboeken kennen een opbouw en hanteren de leerlijnen zoals in een handleiding zijn terug te vinden. Ook de SLO doelen geven een opbouw weer. Deze opbouw is in hoofdlijnen terug te vinden in de methodes.

Uit de verschillende rekenmethodes is globaal de volgende indeling/opbouw te herleiden: tot en met groep 3 is vooral aandacht voor getalbegrip en getal structuren vooral aan de hand van materialen. In de groepen 4, 5, 6 en 7 wordt gewerkt om de materialen los te laten en oplossingsstrategieën aan te leren. In groep 8 wordt vooral een beroep gedaan op het toepassen van de strategieën in verschillende sommen en situaties. In alle groepen is aandacht voor hoofdrekenen om bewerkingen sneller uit te kunnen voeren. Rekenrijk gaat uit van één basisstrategie. Wanneer deze beheerst is worden pas andere strategieën aangeboden; Rekenrijk noemt deze 'variastrategieën'. Rekenrijk kent verschillende leerroutes voor snelle en minder snelle rekenaars. De methodes Wereld In Getallen en Alles telt passen in de gehele methode meerdere strategieën naast elkaar toe.

De uitkomsten van dit onderzoek hebben geresulteerd in een matrix waarin de rekenstrategieën voor optellen, aftrekken, vermenigvuldigen en delen zijn opgenomen. In de matrix is aangegeven waar in de methodes of waar in de digitale rekenspellen de strategieën terug te vinden zijn.

Bronnen

Aftrekken volgens een standaard procedure (E. de Goeij, Freudenthal Instituut Universiteit van Utrecht)

(<file:///C:/Users/Extern/Documents/ZIJH/Onderzoek%20rekenmiddelen/literatuur%20rekenstrategie%20cijferend%20en%20kolomsgewijs%20op%20en%20af.pdf>)

Alles telt servicebulletin (september 2006, nr 12)

(<file:///C:/Users/Extern/Documents/ZIJH/Onderzoek%20rekenmiddelen/alles-telt-servicebulletin-12%20strategieen.pdf>)

Basisstrategieën Rekenrijk

(<https://www.vanderhucht-pauluspotter.nl/wp-content/uploads/2016/09/Basisstrategie%C3%ABn-Rekenrijk.pdf>)

De effecten van Snappet (Universiteit van Twente)

(file:///C:/Users/Extern/Documents/ZIJH/Onderzoek%20rekenmiddelen/De_effecten_van_Snappet_Universiteit_Twente.pdf)

Handleidingen groep 3 tot en met 8 methode 'Alles Telt'

Handleidingen groep 3 tot en met 8 methode 'Wereld in Getallen'

Kerdoelen rekenen en wiskunde (<http://tule.slo.nl/RekenenWiskunde/F-KDRekenenWiskunde.html>)

Kerdoelen Primair Onderwijs (ministerie OCW)

(<file:///C:/Users/Extern/Documents/ZIJH/Onderzoek%20rekenmiddelen/Kerdoelenboekje.pdf>)

Opbrengst gericht onderwijs – rekenen! Wiskunde? (J. van der Linden)

(<http://www.fisme.science.uu.nl/publicaties/literatuur/7376.pdf>)

Passende perspectieven rekenen; overzichten van leerroutes (februari 2012/SLO – nationaal expertisecentrum leerplanontwikkeling)

(<file:///C:/Users/Extern/Downloads/passende-perspectieven-rekenen-leerroutes.pdf>)

Passende perspectieven bij Rekenrijk 3^e editie

(<https://www.bco-onderwijsadvies.nl/sites/bco-onderwijsadvies.nl/files/files/Passende%20Perspectieven%20in%20Rekenrijk.pdf>)

Rekenen op de basisschool – (M. Hickendorff, T.M.M. Mostert, C.J. van Dijk, L.L.M. Jansen, L.L. van der Zee, & M.F. Fagginger Auer - Universiteit Leiden)

(<file:///C:/Users/Extern/Documents/ZIJH/Onderzoek%20rekenmiddelen/Rapport+review+Rekenen+2017.pdf>)

Rekenonderwijs op de basisschool – analyse en sleutels tot verbetering (Koninklijke Nederlandse Akademie van Wetenschappen)

(<file:///C:/Users/Extern/Documents/ZIJH/Onderzoek%20rekenmiddelen/advies%20rekenonderwijs%20bao%20realistisch%20versus%20traditioneel%20rek.pdf>)

Rekenrijk Leerstofoverzicht (Noordhoff)

(<https://view.publitas.com/noordhoff-basisonderwijs/rekenrijk-leerstoverzicht/page/1>)

Rekenstrategieën – uit: Rekenvaardigheid op peil (N.W.J.M. Fischer)

(<file:///C:/Users/Extern/Documents/ZIJH/Onderzoek%20rekenmiddelen/Rekenstrategie%C3%ABn.pdf>)

SLO (<http://tule.slo.nl/RekenenWiskunde/F-L29.html>)

Strategiegebruik bij rekenen tot 20

(<https://website.thiememeulenhoff.nl/allestelt/artikelen/leerkracht/strategiegebruik-bij-rekenen-tot-20.html>)

Spellen Rekentuin – beschrijving

(<file:///C:/Users/Extern/Documents/ZIJH/Onderzoek%20rekenmiddelen/Spellen-Rekentuin%20beschrijving.pdf>)